Esercizi di variabile complessa - AA 2004/05

(Piero D'Ancona)

22 novembre 2004

1) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri:

$$\frac{i-1}{i+1}, \qquad i^n \quad (n \in \mathbb{Z}), \qquad \frac{(i+1)^4}{(i-1)^3}, \qquad \frac{1}{(3i-4)^4}.$$

2) Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ delle equazioni:

$$z^7 + i = 0, \qquad z^{11} + iz^4 = 0, \qquad z^6 + \overline{z}^6 = 0, \qquad z^2 + \frac{1}{z^2} = 0.$$

3) Scrivere tutti i possibili valori delle potenze complesse

$$(2i)^{-i}, \qquad 3^i, \qquad i^1, \qquad 1^i, \qquad 1^1.$$

4) (Questo paradosso è di T. Clausen, 1827). Sappiamo che per ogni intero n

$$e^{2\pi ni} = 1 \quad \text{da cui} \quad e^{1+2\pi ni} = e$$

e quindi anche

$$e^{(1+2\pi ni)^2} = (e^{1+2\pi ni})^{(1+2\pi ni)} = e^{1+2\pi ni} = e.$$

Dall'ultima identità otteniamo (svolgendo il quadrato all'esponente)

$$e^{1-4\pi^2 n^2 + 4\pi ni} = e$$

ma $e^{4\pi ni} = 1$ e in conclusione

$$e^{-4\pi^2 n^2} = 1$$

per ogni intero n. Dov'è l'errore?

5) Determinare per quali valori dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ le seguenti coppie u, v sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria della stessa funzione olomorfa:

$$u(x,y) = ax^2 - by^2, \qquad v(x,y) = cxy$$

$$u(x,y) = ax + by, \qquad v(x,y) = cx + dy$$
$$u(x,y) = ax^2 + by, \qquad v(x,y) = cy^2 + dx$$
$$u(x,y) = a\cos x + b\sin y, \qquad v(x,y) = c\cos y + d\sin x$$
$$u(x,y) = ax^3 + by^3 - 3x^2y, \qquad v(x,y) = cx^3 + dy^3 - 3xy^2.$$

6) Determinare tutte le funzioni ϕ tali che le seguenti coppie u, v siano rispettivamente parte reale e parte immaginaria della stessa funzione olomorfa:

$$u(x,y) = \phi(x) - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy$$

$$u(x,y)=\phi(x)\cos y, \qquad v(x,y)=e^x\sin y$$
$$u(x,y)=e^x\phi(y), \qquad v(x,y)=-e^x\sin y.$$

7) Sia $f=u+iv$ una funzione olomorfa su un aperto connesso E, e supponiamo che esistano due costanti reali a,b tali che
$$a\cdot u(x,y)+b\cdot v(x,y)\equiv \text{costante}.$$
Dimostrare che allora la funzione f è costante su E.

8) Determinare se la funzione $u(x,y)$ è la parte reale di una funzione olomorfa, e se lo è calcolare la parte immaginaria corrispondente:
$$u(x,y)=x^4-y^4, \qquad u(x,y)=-5xy, \qquad u(x,y)=9xy^2-3x^3.$$

9) Determinare la funzione ϕ in modo che $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa, e quindi calcolare tale funzione olomorfa:
$$u(x,y)=\phi(x)y+y^3, \qquad u(x,y)=\phi(x)\cos y, \qquad u(x,y)=\phi(x^2-y^2), \qquad u(x,y)=\phi(x^2+y^2).$$

10) Determinare per quali funzioni α e β di classe C^1 le seguenti forme sono chiuse, esatte o localmente esatte su $\mathbb{R}^2$, e quindi calcolarne tutte le primitive:
$$\omega=\alpha(x)y^2dx+x\beta(y)dy$$
$$\omega=(x^3+\beta(y))dx+(x-y)dy$$
$$\omega=\alpha(x)dx$$
$$\omega=\beta(y)dx-x\beta(y)dy.$$

11) Calcolare gli integrali curvilinei seguenti:
$$\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz \qquad \gamma(t)=e^{it}, \quad 0\le t\le\pi$$
$$\int_\gamma \frac{1}{1+|z|^2}\,dz \qquad \gamma(t)=e^{it}, \quad 0\le t\le 2\pi$$
$$\int_\gamma (z^2+\overline{z})\,dz \qquad \gamma(t)=\cos t+2i\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi$$
$$\int_\gamma (1-\Re z)\,dz \qquad \gamma(t)=t+i\sin t, \quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

12) Indichiamo con $\gamma_{z_0,r}$ la circonferenza di centro z_0 e raggio r, percorsa una volta in senso antiorario:
$$\gamma_{z_0,r}=z_0+re^{it}, \qquad 0\le t\le 2\pi.$$
Utilizzando la formula di Cauchy, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f(z)dz$ per
$$f(z)=\frac{z^2+2}{z(z+i)(2z-i)}, \qquad \gamma=\gamma_{-i,\frac12} \text{ oppure } \gamma_{0,\frac13} \text{ oppure } \gamma_{i,\frac23}$$
$$f(z)=\frac{z^2+2}{z^4+1}, \qquad \gamma=\gamma_{0,\frac12} \text{ oppure } \gamma_{0,2} \text{ oppure } \gamma_{1+i,\frac12}$$
$$f(z)=\frac{\sin z\cos z}{z^5+\pi^5}, \qquad \gamma=\gamma_{0,1} \text{ oppure } \gamma_{-\pi,1}.$$